第45～48章　場合の数

場合の数の分野は、式で簡単に出そうとしても、その式の意味が分かっていなければ、本番で通用する実力があるとはいえません。場合の数を得意にする最短の方法は、全体を見渡す力をつけることです。全体を見渡すことができて初めて、式で簡単に解くことができるのです。

【1】場合の数

1．この単元を学ぶ前に必要な基礎力

＜並べ方，樹形図の書き方＞

①ABの並べ方は何通りありますか。

A － B
B － A
} 2×1＝2通り（答え）

②ABCの並べ方は何通りありますか。

A < B － C / C － B
B
C
} 3×2×1＝6通り（答え）

③ABCDの並べ方は何通りありますか。

A < B < C － D / D － C
　　C
　　D
B
C
D
} 4×3×2×1＝24通り（答え）

【学習のポイント】

樹形図に慣れさせることがどうしても必要です。上の練習を通して、樹形図に慣れさせること、そして全体を見渡す視点を与えること、全体を見通したら、式を立てて答えを導くこと、を学ばせます。小学生と中学生は理解度に大きな違いがありますから、中学生に対するような教え方をせず、ゆっくりと丁寧に導く必要があります。「私には理解できない」という誤った思い込みをさせないようにしましょう。ゆっくりやればだれでもできるようになります。

２．場合の数

【問１】　５人の生徒から、学級委員と学級副委員をそれぞれ一人ずつ選びます。選び方は全部で何通りありますか。

【考え方】　式を覚えさえるようなことだけはしてはいけません。大切なことは、全体を見通す力をつけてから、式を自分で考えさせることです。

この問題では、同じ（A，B）でも、（A，B）と（B，A）は別物ですので、このパターンを「リレー型」と呼ぶことにします。

「リレー型」の問題では、①登場人物に背番号をふり、②樹形図を書き、③式を立てる、の順で考えます。

【解答例】　「5 人の生徒」は抽象的なので、それぞれ A，B，C，D，E と背番号をふります。

↓

次に樹形図を書きます。

委員　副委員

A < B, C, D, E
B
C
D
E

5×4＝20 通り（答え）

【問２】　５人の生徒から、２人の掃除当番を選びます。何通りの選び方がありますか。

【考え方】　この問題では、（A，B）と（B，A）は同じことですので、２つ合わせて１通りと数えますね。このパターンを「そうじ当番型」と呼ぶことにします。

そうじ当番型では、パターン化してすぐに計算できるようにしておく必要があります。

【解答例】　「5 人の生徒」は抽象的なので、それぞれ A，B，C，D，E と背番号をふります。

↓

次に樹形図を書きます。

A < B, C, D, E
B
C
D
E

5×4＝20 通り

ところが、（A，B）と（B，A）は同じことですので、すべての組み合わせについて、２回ずつダブっています。ですので、20÷2＝１０通り（答え）となります。

これを計算ですると、次のようになります。これをマスターしなければなりません。

$\frac{5\times4}{2\times1}$ ＝１０通り（答え）

しかし、「これで一安心」としてはいけません。具体的に自分の頭で考えて、腹の底に落とすことが必要です。

ここでは、A，B，C，D，E の５人の中から２人を選んだらどのような組み合わせがあるか、を具体的に書きだし、本当に 10 通りあるかを検証するのです。この手間を省くと受験に使える知識がついたとは言えないんです。つまり、上の式を状況に応じて自信を持って使いこなせるようにはならないんです。

それでは、書き出してみましょう。次のようにやると、ダブりを省きながら上手に書き出すことができます。

A，B，C，D，E　→　（A，B）（A，C）（A，D）（A，E）

A から始まる組み合わせが終わったら、次に B から始まる組み合わせを考えます。

A，B，C，D，E　→　（B，C）（B，D）（B，E）

さらに、C から始まる組み合わせを考えます。

A，B，C，D，E　→　（C，D）（C，E）

最後に、D から始まる組み合わせを考えます。

A，B，C，D，E　→　（D，E）

このようにして、4＋3＋2＋1＝10 通りあることが確かめることができます。大切なことは、「本当にそうなるの？」という疑問を大切にすること、そして、その疑問を解消して初めて式を使いこなせるようになる、ということです。

それでは、「そうじ当番型」の計算を練習してみましょう。

【問 3】① ４人中２人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
② ４人中３人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
③ ５人中２人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
④ ５人中３人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
⑤ ５人中４人のそうじ当番の選び方は□通りあります。

【解答例】 計算のやり方にルールがありますから、しっかり身につけましょう。

① ４人中２人 → $\frac{4\times3}{2\times1}$ ＝6通り（答え）

※（A，B）（B，A）は同じことなので（１ページ参照）、２×１で割ります。

② ４人中３人 → $\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}$ ＝4通り（答え）

※（A，B，C）はダブっていますので（１ページ参照）、３×２×１で割ります。

③ ５人中２人 → $\frac{5\times4}{2\times1}$ ＝10通り（答え）

④ ５人中３人 → $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$ ＝10通り（答え）

⑤ ５人中４人 → $\frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$ ＝5通り（答え）

※（A，B，C，D）はダブっていますので（１ページ参照）、４×３×２×１で割ります。

↓

それでは、それぞれ組み合わせを書きだしてみましょう。これを面倒くさがる人は本番で通用する力がつきません。「先生が言っているから何となくいいや」で済ますことなく、自分の頭と手で具体的に考えるくせをつけることが、本番で強くします。

① A，B，C，D

→（A，B）（A，C）（A，D）（B，C）（B，D）（C，D）

② A，B，C，D

→4 人うち１人だけがそうじ当番を免れます。つまり、A か B か C か D かがそうじ当番を免れます。従って、（B，C，D）（A，C，D）（A，B，D）（A，B，C）。

③省略（問２と同じ）

④ A，B，C，D，E

→③の応用形です。次のようにして１０通りを拾い出します。

A，B，C，D，E →　（A，B，C）（A，B，D）（A，B，E）

A，B，C，D，E →　（A，C，D）（A，C，E）

A，B，C，D，E →　（A，D，E）

A，B，C，D，E →　（B，C，D）（B，C，E）

A，B，C，D，E →　（B，D，E）

A，B，C，D，E →　（C，D，E）

⑤省略（問３②と同じ）

【2】４科のまとめ解説（p. ９５）

※ p.95とp.97をしっかり理解すれば、p.99とp.101は自力で解けますので、p.99とp.101の解説は省きます。

$\boxed{3}$

男子４人、女子５人のグループの中から、男子２人、女子１人を選ぶとき、選び方は全部で何通りありますか。

【類題】 ５人の生徒から、学習係３人と給食係２人を選ぶとき、選び方は何通りありますか。ただし、１人が２つの係になることはできません。

$\boxed{3}$の問題は、類題との違いを意識しておく必要があります。まず、$\boxed{3}$からみてゆきましょう。

男子は４人中２人を選び、女子は５人中１人を選びます。よって、男子の選び方は $\frac{4\times3}{2\times1}$ ＝６通り、女子の選び方は５通りあります。従って、６×５＝３０通り（答え）となります。

ここで、６×５で正しいのか、答えを検証しておきましょう。男子に背番号をふって ABCD、女子にも背番号をふってアイウエオとしておきましょう。下のように書き出して、かけ算になることが分かれば OK です。

男子の選び方	女子の選び方
A，B	ア
A，C	イ
A，D	ウ
B，C	エ
B，D	オ
C，D	

では、類題のほうはどうでしょうか。学習係は５人中３人、給食係は５人中２人を選びます。よって、学習係の選び方は $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$ ＝１０通り、給食係の選び方は $\frac{5\times4}{2\times1}$ ＝１０通り、となります。じゃあ、答えは何でしょうか。先生の言ったことをなぞるのではなく、５人に ABCDE と背番号をふり、自分の頭で具体的に考えて検証しましょう。これが応用力をつける近道です。

学習係の選び方	給食係の選び方
A，B，C	A，B
A，B，D	A，C
A，B，E	A，D
A，C，D	A，E
A，C，E	B，C
A，D，E	B，D
B，C，D	B，E
B，C，E	C，D
B，D，E	C，E
C，D，E	D，E

すると、類題では、１０×１０＝１００通りではなく、１０通り（答え）だと分かります。学習係か給食係のどちらか決まってしまえば、残りの決まってしまうからです。これを自分で発見しなくてはなりません。場合の数は、計算の裏側にある全体像を把握するようにしましょう。

4

白のおはじき４個と赤のおはじき２個があります。このおはじき６個を１列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

６個の座席があって、そのうちの４か所に白のおはじきを置くと考えます。すると、６か所中４か所の計算ですから、$\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$ ＝15通り（答え）となります。赤のおはじきで考えても（6か所中２か所)、$\frac{6\times5}{2\times1}$ ＝15通り（答え）と答えがでます。

5

A，B，C，D，E，Fの６人が旅行に出かけ、ある旅館で４人部屋と２人部屋に分かれて泊まることになりました。A，Bの２人が同じ部屋に泊まる場合は何通りありますか。

「どうやって解くか分からない」ってさじを投げてはいけません。解法はそもそもあるものではなく、書き出しながら発見するものです。この問題の場合、4 人部屋に入る人が決まれば、2人部屋に入る人も決まります。ですから、４人部屋にだれが入るかを数えていけば、それが答えになります。

そこで数えてゆくと、(X，C，D)（X，C，E）（X，C，F）（X，D，E）（X，D，F）（X，E，F）（C，D，E，F）となり、7通り（答え）となります。

解答のやり方を丸暗記するよりも、書き出す力をつける方が応用力が身につきます。

6

階段を６段上がるのに、１段上がりだけ、あるいは２段上がりだけ、あるいは１段上がりと２段上がりを混ぜて上ります。上り方は何通りありますか。

これも書き出せば見通しがつきますね。4の問題の応用です。上り方は次の通りです。

１段＋１段＋１段＋１段＋１段＋１段 …… １通り

２段＋１段＋１段＋１段＋１段 …… ５回中１回が２段なので、５通り

２段＋２段＋１段＋１段 …… ４回中２回が２段なので、$\frac{4\times3}{2\times1}$ ＝６通り

２段＋２段＋２段 …… １通り

従って、１＋５＋６＋１＝１３通り（答え）となります。このプリントの１ページから４ページまでの知識をしっかり身につけてください。結局は、樹形図を書くなりして書き出すこと、そして「〇個中〇個」の計算ができるようになること、この 2 点だけで戦えることを生徒に分かってもらいたいんです。

【3】4科のまとめ解説（p. 97）

5

100円硬貨2枚、50円硬貨1枚、10円硬貨3枚の一部、または全部を使って支払える金額の種類は全部で何通りありますか。

超重要パターンですね。中・上位校を狙うのであれば、このような問題を好き好んで解くようにしなければなりません。次のように整理すれば、23通り（答え）と分かります。「金額の種類」とありますので、ダブる場合がないかどうかをチェックしなくてはなりません。

100円	50円	10円	
0	0	0	― ×
		1	― 10円
		2	― 20円
		3	― 30円
	1	0	― 50円
		1	― 60円
		2	― 70円
		3	― 80円

100円	50円	10円	
1	0	0	― 100円
		1	― 110円
		2	― 120円
		3	― 130円
	1	0	― 150円
		1	― 160円
		2	― 170円
		3	― 180円

100円	50円	10円	
2	0	0	― 200円
		1	― 210円
		2	― 220円
		3	― 230円
	1	0	― 250円
		1	― 260円
		2	― 270円
		3	― 280円

6

10円、50円、80円の3種類の切手があります。この3種類の切手を組み合わせてちょうど300円分にします。切手の組み合わせは全部で何通りありますか。ただし、どの切手も1枚以上使うものとします。

この問題も、5と同じく書き出せばよいですね。大きな金額から先に決めていくのがコツです。

80円	50円	10円	
1	1	― 17	→ 300円
	2	― 12	→ 300円
	3	― 7	→ 300円
	4	― 2	→ 300円

80円	50円	10円	
2	1	― 9	→ 300円
	2	― 4	→ 300円
3	― 1	― 1	→ 300円

従って、7通り（答え）となります。