

第45～48章 場合の数

場合の数の分野は、式で簡単に出そうとしても、その式の意味が分かっていなければ、本番で通用する実力があるとはいえません。場合の数を得意にする最短の方法は、全体を見渡す力をつけることです。全体を見渡すことができ初めて、式で簡単に解くことができるのです。

【1】場合の数

1. この単元を学ぶ前に必要な基礎力

<並べ方，樹形図の書き方>

①ABの並べ方は何通りありますか。

$$\left. \begin{array}{l} A - B \\ B - A \end{array} \right\} 2 \times 1 = \underline{2 \text{ 通り}} \text{ (答え)}$$

②ABCの並べ方は何通りありますか。

$$\left. \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{l} B - C \\ C - B \end{array} \right. \\ B \\ C \end{array} \right\} 3 \times 2 \times 1 = \underline{6 \text{ 通り}} \text{ (答え)}$$

③ABCDの並べ方は何通りありますか。

$$\left. \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{l} B \left\{ \begin{array}{l} C - D \\ D - C \end{array} \right. \\ C \\ D \end{array} \right. \\ B \\ C \\ D \end{array} \right\} 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \underline{24 \text{ 通り}} \text{ (答え)}$$

【学習のポイント】

樹形図に慣れさせることがどうしても必要です。上の練習を通して、樹形図に慣れさせること、そして全体を見渡す視点を与えること、全体を見通したら、式を立てて答えを導くこと、を学ばせます。小学生と中学生は理解度に大きな違いがありますから、中学生に対するような教え方をせず、ゆっくりと丁寧に導く必要があります。「私には理解できない」という誤った思い込みをさせないようにしましょう。ゆっくりやればだれでもできるようになります。

2. 場合の数

【問1】 5人の生徒から、学級委員と学級副委員をそれぞれ一人ずつ選びます。選び方は全部で何通りありますか。

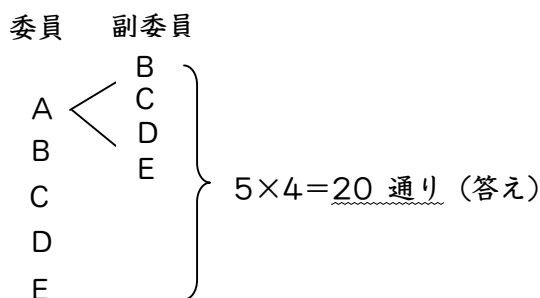
【考え方】 式を覚えさせるようなことだけはしてはいけません。大切なことは、全体を見通す力をつけてから、式を自分で考えさせることです。

この問題では、同じ (A, B) でも、(A, B) と (B, A) は別物ですので、このパターンを「リレー型」と呼ぶことにします。

「リレー型」の問題では、①登場人物に背番号をふり、②樹形図を書き、③式を立てる、の順で考えます。

【解答例】 「5人の生徒」は抽象的なので、それぞれ A, B, C, D, E と背番号をふります。

↓
次に樹形図を書きます。



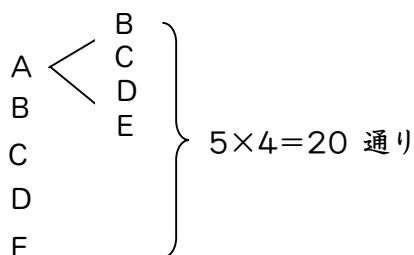
【問2】 5人の生徒から、2人の掃除当番を選びます。何通りの選び方がありますか。

【考え方】 この問題では、(A, B) と (B, A) は同じことですので、2つ合わせて1通りと数えますね。このパターンを「そうじ当番型」と呼ぶことにします。

そうじ当番型では、パターン化してすぐに計算できるようにしておく必要があります。

【解答例】 「5人の生徒」は抽象的なので、それぞれ A, B, C, D, E と背番号をふります。

↓
次に樹形図を書きます。



考える姿勢が身につく受験算数

ところが、(A, B) と (B, A) は同じことですので、すべての組み合わせについて、2回ずつダブっています。ですので、 $20 \div 2 = 10$ 通り (答え) となります。

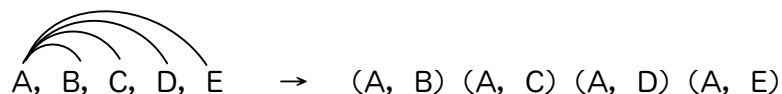
これを計算ですると、次のようになります。これをマスターしなければなりません。

$$\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{通り (答え)}$$

しかし、「これで一安心」としてはいけません。具体的に自分の頭で考えて、腹の底に落とすことが必要です。

ここでは、A, B, C, D, E の5人の中から2人を選んだらどのような組み合わせがあるか、を具体的に書きだし、本当に10通りあるかを検証するのです。この手間を省くと受験に使える知識がついたとは言えないんです。つまり、上の式を状況に応じて自信を持って使いこなせるようにはならないんです。

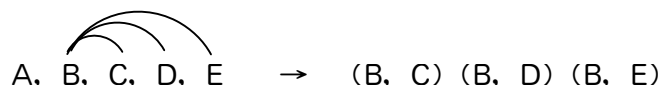
それでは、書き出してみましょう。次のようにやると、ダブリを省きながら上手に書き出すことができます。



A, B, C, D, E → (A, B) (A, C) (A, D) (A, E)

The diagram shows the letters A, B, C, D, E in a horizontal line. Four curved lines (arcs) are drawn above the letters, each starting from A and ending at B, C, D, and E respectively, indicating the combinations (A, B), (A, C), (A, D), and (A, E).

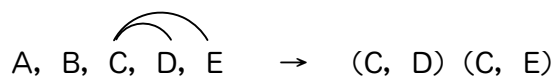
Aから始まる組み合わせが終わったら、次にBから始まる組み合わせを考えます。



A, B, C, D, E → (B, C) (B, D) (B, E)

The diagram shows the letters A, B, C, D, E in a horizontal line. Three curved lines (arcs) are drawn above the letters, each starting from B and ending at C, D, and E respectively, indicating the combinations (B, C), (B, D), and (B, E).

さらに、Cから始まる組み合わせを考えます。



A, B, C, D, E → (C, D) (C, E)

The diagram shows the letters A, B, C, D, E in a horizontal line. Two curved lines (arcs) are drawn above the letters, each starting from C and ending at D and E respectively, indicating the combinations (C, D) and (C, E).

最後に、Dから始まる組み合わせを考えます。



A, B, C, D, E → (D, E)

The diagram shows the letters A, B, C, D, E in a horizontal line. One curved line (arc) is drawn above the letters, starting from D and ending at E, indicating the combination (D, E).

このようにして、 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 通りあることが確かめることができます。大切なことは、「本当にそうなるの?」という疑問を大切にすること、そして、その疑問を解消して初めて式を使いこなせるようになる、ということです。

それでは、「そうじ当番型」の計算を練習してみましょう。

- 【問3】**
- ① 4人中2人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
 - ② 4人中3人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
 - ③ 5人中2人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
 - ④ 5人中3人のそうじ当番の選び方は□通りあります。
 - ⑤ 5人中4人のそうじ当番の選び方は□通りあります。

考える姿勢が身につく受験算数

【解答例】 計算のやり方にルールがありますから、しっかり身につけましょう。

① 4人中2人 → $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ 通り (答え)

※ (A, B) (B, A) は同じことなので (1ページ参照)、 2×1 で割ります。

② 4人中3人 → $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$ 通り (答え)

※ (A, B, C) はダブっていますので (1ページ参照)、 $3 \times 2 \times 1$ で割ります。

③ 5人中2人 → $\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 通り (答え)

④ 5人中3人 → $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ 通り (答え)

⑤ 5人中4人 → $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$ 通り (答え)

※ (A, B, C, D) はダブっていますので (1ページ参照)、 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ で割ります。
↓

それでは、それぞれ組み合わせを書きだしてみましよう。これを面倒くさがる人は本番で通用する力がつきません。「先生が言っているから何となくいいや」で済ますことなく、自分の頭と手で具体的に考えるくせをつけることが、本番で強くします。

① A, B, C, D

→ (A, B) (A, C) (A, D) (B, C) (B, D) (C, D)

② A, B, C, D

→ 4人うち1人だけがそうじ当番を免れます。つまり、AかBかCかDかがそうじ当番を免れます。従って、(B, C, D) (A, C, D) (A, B, D) (A, B, C)。

③省略 (問2と同じ)

④ A, B, C, D, E

→ ③の応用形です。次のようにして10通りを拾い出します。

$\overbrace{A, B} \quad C, D, E \rightarrow (A, B, C) (A, B, D) (A, B, E)$

$A, B, \overbrace{C, D} \quad E \rightarrow (A, C, D) (A, C, E)$

$A, B, C, \overbrace{D, E} \rightarrow (A, D, E)$

$A, \overbrace{B, C} \quad D, E \rightarrow (B, C, D) (B, C, E)$

$A, \overbrace{B, C, D} \quad E \rightarrow (B, D, E)$

$A, B, \overbrace{C, D, E} \rightarrow (C, D, E)$

⑤省略 (問3②と同じ)

【2】4科のまとめ解説 (p. 95)

※ p.95とp.97をしっかりと理解すれば、p.99とp.101は自力で解けますので、p.99とp.101の解説は省きます。

3

男子4人、女子5人のグループの中から、男子2人、女子1人を選ぶとき、選び方は全部で何通りありますか。

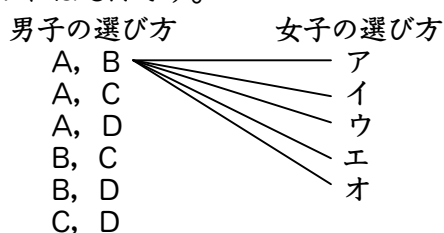
【類題】 5人の生徒から、学習係3人と給食係2人を選ぶとき、選び方は何通りありますか。ただし、1人が2つの係になることはできません。

3の問題は、類題との違いを意識しておく必要があります。まず、3からみてゆきましょう。

男子は4人中2人を選び、女子は5人中1人を選びます。よって、男子の選び方は $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} =$

6通り、女子の選び方は5通りあります。従って、 $6 \times 5 = 30$ 通り (答え) となります。

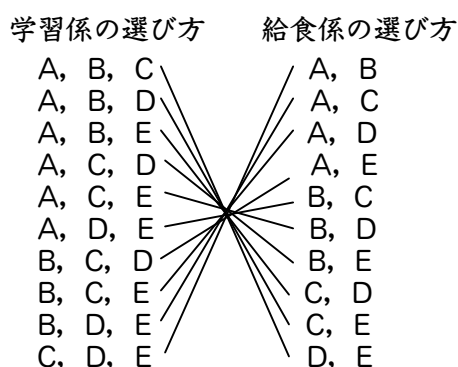
ここで、 6×5 で正しいのか、答えを検証しておきましょう。男子に背番号をふって ABCD、女子にも背番号をふってアイエオとしておきましょう。下のよう書き出して、かけ算になることが分かれば OK です。



では、類題のほうはどうでしょうか。学習係は5人中3人、給食係は5人中2人を選びます。

よって、学習係の選び方は $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ 通り、給食係の選び方は $\frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 通り、となりま

す。じゃあ、答えは何でしょうか。先生の言ったことをなぞるのではなく、5人に ABCDE と背番号をふり、自分の頭で具体的に考えて検証しましょう。これが応用力をつける近道です。



すると、類題では、 $10 \times 10 = 100$ 通りではなく、10通り (答え) だと分かります。学習係か給食係のどちらか決まってしまうえば、残りの決まってしまうからです。これを自分で発見しなくてはなりません。場合の数は、計算の裏側にある全体像を把握するようにしましょう。

4 白のおはじき 4 個と赤のおはじき 2 個があります。このおはじき 6 個を 1 列に並べるとき、並べ方は何通りありますか。

6 個の座席があって、そのうちの 4 か所に白のおはじきを置くと考えます。すると、6 か所中 4 か所の計算ですから、 $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$ 通り (答え) となります。赤のおはじきで考えても (6 か所中 2 か所)、 $\frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ 通り (答え) と答えがでます。

5 A, B, C, D, E, F の 6 人が旅行に出かけ、ある旅館で 4 人部屋と 2 人部屋に分かれて泊まることになりました。A, B の 2 人が同じ部屋に泊まる場合は何通りありますか。

「どうやって解くか分からない」ってさじを投げてはいけません。解法はそもそもあるものではなく、書き出しながら発見するものです。この問題の場合、4 人部屋に入る人が決まれば、2 人部屋に入る人も決まります。ですから、4 人部屋にだれが入るかを数えていけば、それが答えになります。

そこで数えてゆくと、(X, C, D) (X, C, E) (X, C, F) (X, D, E) (X, D, F) (X, E, F) (C, D, E, F) となり、7 通り (答え) となります。

解答のやり方を丸暗記するよりも、書き出す力をつける方が応用力が身につきます。

6 階段を 6 段上がるのに、1 段上がりだけ、あるいは 2 段上がりだけ、あるいは 1 段上がりと 2 段上がりを混ぜて上ります。上り方は何通りありますか。

これも書き出せば見通しがつきますね。4 の問題の応用です。上り方は次の通りです。

1 段 + 1 段 + 1 段 + 1 段 + 1 段 + 1 段 …… 1 通り
 2 段 + 1 段 + 1 段 + 1 段 + 1 段 …… 5 回中 1 回が 2 段なので、5 通り
 2 段 + 2 段 + 1 段 + 1 段 …… 4 回中 2 回が 2 段なので、 $\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ 通り
 2 段 + 2 段 + 2 段 …… 1 通り

従って、 $1 + 5 + 6 + 1 = 13$ 通り (答え) となります。このプリントの 1 ページから 4 ページまでの知識をしっかりと身につけてください。結局は、樹形図を書くなりして書き出すこと、そして「○個中○個」の計算ができるようになること、この 2 点だけで戦えることを生徒に分かってもらいたんです。

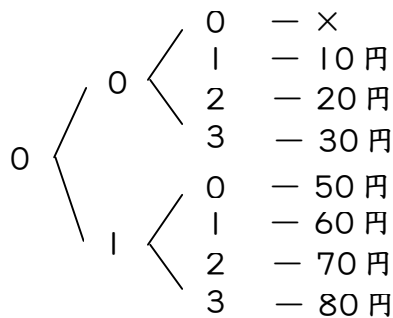
【3】4科のまとめ解説 (p. 97)

5

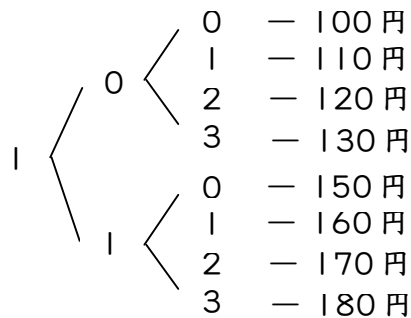
100円硬貨2枚、50円硬貨1枚、10円硬貨3枚の一部、または全部を使って支払える金額の種類は全部で何通りありますか。

超重要パターンですね。中・上位校を狙うのであれば、このような問題を好き好んで解くようにしなければなりません。次のように整理すれば、23通り (答え) と分かります。「金額の種類」とありますので、ダブる場合がないかどうかをチェックしなくてはなりません。

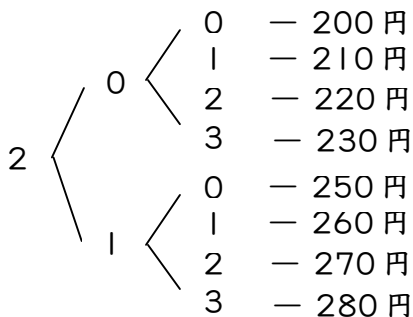
100円 50円 10円



100円 50円 10円



100円 50円 10円

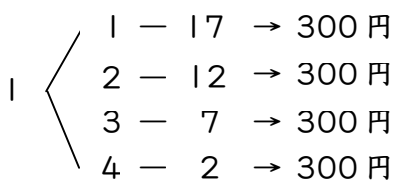


6

10円、50円、80円の3種類の切手があります。この3種類の切手を組み合わせてちょうど300円分にします。切手の組み合わせは全部で何通りありますか。ただし、どの切手も1枚以上使うものとします。

この問題も、5と同じく書き出せばよいですね。大きな金額から先に決めていくのがコツです。

80円 50円 10円



80円 50円 10円

